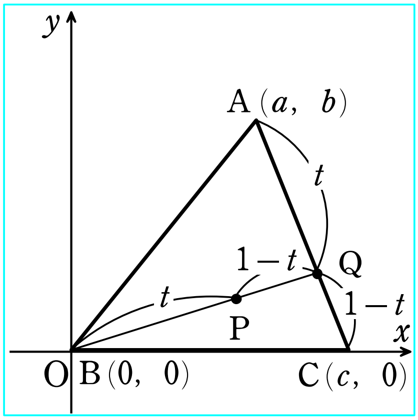
三角形内部の点の軌跡と面積

～微分積分法を用いて，探究する～

今回は，三角形内部で一定の規則に従って動く点の軌跡と面積の関係を探ってみたい。

問題　鋭角三角形 ABC を考え，その面積を S とする。$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，線分 AC を $t:1-t$ に内分する点を Q，線分 BQ を $t:1-t$ に内分する点を P とする。実数 t がこの範囲を動くときに点 P の描く曲線と，線分 BC によって囲まれる部分の面積を，S を用いて表せ。　　（2019，京都大学•理系）



解答　直線 BC を x 軸に，点 B を通り，BC に垂直な直線を y 軸にとると，3 頂点は a，b，c を実数として

$$A(a,\ b),\ B(0,\ 0),\ C(c,\ 0)$$ とおける。

ここで，$b>0$，$c>0$ としても一般性を失わない。

また，三角形 ABC は鋭角三角形であるから

$$0<a<c$$

このとき　$\triangle ABC=\dfrac{bc}{2}$，　すなわち　$S=\dfrac{bc}{2}$

点 Q は線分 AC を $t:1-t$ に内分する点であるから，

点 Q の座標は，　$Q\left(a(1-t)+ct,\ b(1-t)\right)$

また，点 P は線分 BQ を $t:1-t$ に内分する点であるから，$\overrightarrow{BP}=t\,\overrightarrow{BQ}$ ($\overrightarrow{OP}=t\,\overrightarrow{OQ}$) より，

点 P の座標は，　$P\left(at(1-t)+ct^2,\ bt(1-t)\right)$

P$(x,\ y)$ とすると，$x=at(1-t)+ct^2=a(t-t^2)+ct^2$，$y=bt(1-t)=b(t-t^2)\cdots\cdots(*)$

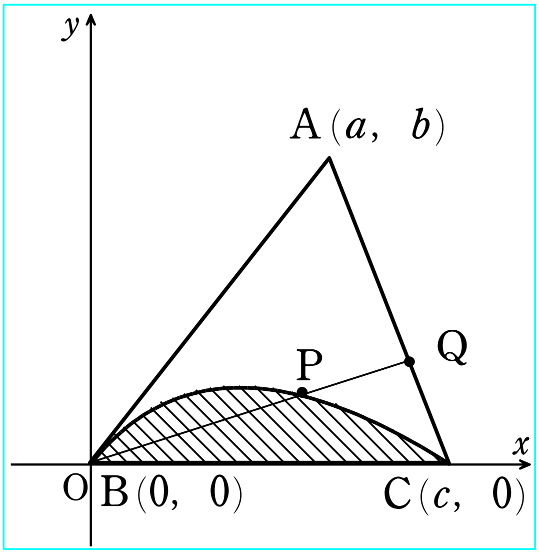
x を t で微分すると　$\dfrac{dx}{dt}=a(1-2t)+2ct \iff dx=\{a(1-2t)+2ct\}dt$

$0<a<c$ であるから，$0<t<1$ において　$\dfrac{dx}{dt}>0$

よって，$0<t<1$ において，x は単調に増加する。

また，$b>0$，$0<t<1$ より　$y>0$

ゆえに，求める面積を T とすると，T は右の図の斜線部分の面積であるから



$$T=\int_0^c y\,dx$$

$$=\int_0^1 b(t-t^2)\cdot\{\,a(1-2t)+2ct\,\}\,dt$$

$$=\int_0^1\{ab(2t^3-3t^2+t)+2bc(t^2-t^3)\}\,dt$$

$$=\left[ab\left(\frac{t^4}{2}-t^3+\frac{t^2}{2}\right)+2bc\left(\frac{t^2}{3}-\frac{t^4}{4}\right)\right]_0^1$$

$$=ab\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)+2bc\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{bc}{6}$$

したがって，$S=\dfrac{bc}{2}$ より　　$\underline{T=\dfrac{S}{3}}$　答

研究　　この問題によって明らかになったことは，鋭角三角形 ABC において，対辺 AC を $AQ:QC=m:n$ に内分する点 Q と頂点 B を結んだ線分 BQ を同じ比に内分する，つまり $BP:PQ=m:n$ に内分する点 P の軌跡の曲線と辺 BC によって囲まれる図形の面積は，頂点Aの位置にかかわらず，常に $\triangle ABC$ の面積の $\dfrac{1}{3}$ になるということである。

点 P の軌跡の曲線は，$(*)$のように「媒介変数表示」される曲線であるので，平面幾何の定理によってこの性質を証明することはむずかしい。ここにも微分積分学の威力が発揮されているといえるだろう。

以上